АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ЭРЕНФЕСТА

На первом Сольвеевском конгрессе, собравшемся 30 октября 1911 года в Брюсселе, чтобы обсудить проблемы теории излучения и квантов, Г. Лоренц, выступая в прениях по докладу Эйнштейна, посвященному приложению теории квантов к проблемам теплоемкости твердых тел, упомянул о небольшой дискуссии, имевшей место незадолго до этого между ним и Эйнштейном. Лоренц предложил рассмотреть задачу о поведении несколько необычного маятника: нить, на которую подвешен груз, зажата двумя пальцами; медленно продвигая их вдоль нити в вертикальном направлении, можно менять длину маятника и, значит, его период. А что будет с энергией колебаний? Ответ Эйнштейна, по словам Лоренца, последовал практически незамедлительно: энергия системы будет меняться пропорционально частоте колебаний. Заключивший дискуссию на конгрессе Варбург напомнил, что эту же проблему — для частного случая — разбирал еще Галилей, который указал, что если мгновенно изменить положение точки подвеса маятника как раз в то время, когда он проходит через вертикаль, то период его изменится скачком.

Маятник с медленно (адиабатически) меняющейся длиной с тех пор довольно часто называется маятником Эйнштейна; справедливо, однако, заметить, что еще в 1902 году эту систему исследовал Рэлей в статье «О давлении колебаний». Поводом для такого исследования послужили работы по световому давлению, в частности экспериментальные результаты П. Н. Лебедева, на которого Рэлей непосредственно ссылается в своей статье. Рэлей задался вопросом о том, существует ли аналог такого давления и в случае простых механических колебаний. С этой целью он рассмотрел маятник с подвижным подвесом, установив, что в процессе медленного движения точки закрепления («овеществленной» в его мысленном эксперименте в виде кольца, зажимающего нить), сохраняется величина $El^{1/2}$, где l — длина нити, а E — энергия колебаний. Энергия, теряемая при этом колеблющейся системой (или, если нить укорачивается, привносимая в нее), идет на работу сил, действующих на кольцо и стремящихся поднять его.

На том же конгрессе присутствовал в качестве делегата и Эрнест Резерфорд, который уже опубликовал к этому времени свою работу о планетарной «нуклеарной» модели атома. Она не вызвала, однако, никакого внимания у делегатов конгресса, обсуждавших, если воспользоваться выражением Эйнштейна, «те скачки, которые вызывают у нас такое отвращение в теории Планка», и которые «в природе, по-видимому, действительно существуют». А коль скоро так, то и расшатывают здание классической физики. Модель же Резерфорда наносила ей новый сокрушительный удар. Нильс Бор позднее, в 1913 году, перенесший представление о скачках и квантах на теорию атома, трудился в это время в Англии у Резерфорда. Покончив с экспериментальными работами по определению поверхностного натяжения воды методом капиллярных волн, возникающих

---

* Только на конгрессе 1921 года, первом послевоенном, Резерфорд выступил с обзором своих работ по ядру.

на ее поверхности, работами, представленными к опубликованию Рамзаем и Ралеем, он уже переключался на решение проблем, которые ставила перед физикой модель атома по Резерфорду.

В статье Бора, опубликованной в английском журнале «Philosophical Magazine» и базировавшейся на квантах Планка и Эйнштейна и атомах Резерфорда, соответствующие представления были, как известно, объединены. Постулатами, сформулированными в этой статье, Бор положил начало квантовой теории атома.

Компромиссный характер этой теории был очевиден как для самого ее основоположника, так и для современников. О. Д. Хвольсон остроумно заметил, что «... физика стала немного напоминать ту часть медицины, которая иногда успешно вылечивает больных лекарствами, для которых существуют готовые рецепты, но действие которых на организм непонятно. Так, мы в физике имеем чудодейственные рецепты квантования. Эти рецепты непонятны, но они бесконечно полезны».

Пользуясь же словами самого Бора (сказанными, правда, спустя 40 с лишним лет после описываемых событий), можно утверждать, что его собственная теория была достаточно «безумной», чтобы быть верной.

Квантовая теория Бора устанавливала существование стационарных состояний атома, характеризуемых тем, что при движении вокруг ядра электрон не излучает энергии. Подобно уровням планковского осциллятора, энергия боровского атома (ротатора) также квантовалась. Это заключение подтверждалось согласием нарисованной картины с огромным экспериментальным материалом, подготовленным в предшествовавшие годы спектроскопическими исследованиями и теоретическим определением постоянной Ридберга. Естественно, возникали вопросы: чем определяются те величины, характеризующие мир атома, которые квантуются; чем они выделяются среди других величин; для каких процессов использование классической механики не ведет к противоречиям с опытом и тем самым является допустимым? Каково соответствие между новой квантовой теорией и классической механикой и электродинамикой? Можно ли и здесь, как в случае теории относительности, говорить, что новая теория содержит в себе старую как предельный случай?

Для ответа на эти вопросы исключительно большое значение имели исследования Эренфеста, в которых был подведен фундамент под строящееся здание новой квантовой теории. Тот факт, что его вклад в эту титаническую работу не находит должной оценки у теперешнего поколения физиков, хотя и высоко оценивался великими современниками самого Эренфеста, о чем будет сказано ниже, объясняется компромиссным характером самой квантовой теории атома Бора, игравшей роль строительных лесов, которые были воздвигнуты в процессе становления квантовой механики де Бройля — Гейзенберга — Шредингера — Борна и просуществовали немногим более десятилетия (1913—1925 годы).

Эренфест был подготовлен к этим работам всем ходом предшествовавшей 10-летней научной деятельности. В статье, посвященной планковской теории излучения, опубликованной в 1911 году, незадолго до Сольвеевского конгресса, он дал четкий анализ квантовой гипотезы Планка, сопоставив ее с квантовой теорией фотонов Эйнштейна. Исходным для Эренфеста был прежде всего закон смещения

Вина, которым устанавливался вид плотности излучения ρ: $\rho(\nu, T) = \alpha\nu^3 f\left(\beta\frac{\nu}{T}\right)$; он был выведен на основе классической электродинамики и термодинамики (α и β в этой формуле — константы, а о функции Вина f утверждалось, что она зависит от аргумента $\beta\frac{\nu}{T}$, а не от каждого из параметров: ν—частоты, T — температуры и, наконец, константы β). Эренфест исходил, далее, из экспериментальных данных, относящихся к характеру спада кривой плотности излучения со стороны низких и высоких частот. В области низких частот этот спад нашел свое отражение в формуле Рэлея — Джинса $\rho = \frac{8\pi k}{c^3}\nu^2 T$ (k— постоянная Больцмана); поведение ρ при высоких частотах описывалось формулой Вина $\rho = \alpha\nu^3 e^{-\beta\frac{\nu}{T}}$, которая не имела под собой четких теоретических обоснований. Обе формулы, каждая в своей области частот, прекрасно описывали экспериментально наблюдавшуюся картину распределения энергии в спектре излучения черного тела. Планк объединил обе эти формулы в свою знаменитую формулу (1900 год), получившую потом в его же работе теоретическое обоснование за счет применения к излучению вероятностной концепции в духе Больцмана. Из этой концепции, как известно, с необходимостью следовал переход к дискретным порциям энергии.

Именно указанные выше экспериментальные факты накладывали определенные ограничения на вид виновской функции f:

$$\lim_{\sigma\to 0}[\sigma f(\sigma)] = 0 \text{ («красное требование»)}$$

и

$$\lim_{\sigma\to\infty}[\sigma^4 f(\sigma)] = 0 \text{ («фиолетовое требование»)};$$

здесь $\sigma = \beta\nu/T$. Но нельзя ли подойти к квантам энергии (в существовании которых Эренфест не сомневался) иначе, чем это сделал Планк, не постулируя их в рамках больцмановских представлений (о связи энтропии и вероятности), а каким-либо иным путем, за счет иного постулата? Эренфест сосредоточил свое внимание на больцмановском допущении о том, что все области фазового пространства (газа) имеют равный вес, т. е. что вероятность пребывания системы в том или ином состоянии не зависит от того, какой области фазового пространства это состояние соответствует. Это представление, отметил Эренфест, является только самым простым, а не обязательным — да и сама квантовая природа осциллятора Планка показывает, что в фазовом пространстве существуют выделенные «разрешенные» области, разделенные друг от друга запрещенными промежутками. К каким выводам можно прийти, если отказаться от постоянства статистического веса, приняв, что он является функцией энергии осциллятора и его частоты? В результате тщательного математического анализа проблемы Эренфест пришел, во-первых, к тому, что наличие выделенных (разрешенных) значений в спектре частот осциллятора, в частности, и точки $\nu = 0$, разделенных промежутками, в которых статистический вес по Планку постулиро-

вался равным нулю, оказалось следствием закона Вина, «красного» и «фиолетового» требований (и некоторых других вполне «классических» постулатов: например о постоянстве энтропии при адиабатическом сжатии излучения).

Что касается вида статистического веса, то он оказался функцией не ν и E в отдельности, а (с точностью до несущественного при вычислении распределения множителя), их отношения E/ν, в какой-то мере по аналогии с тем, что анализ Вина показал для функции f, зависимость которой от частоты ν и температуры T выступала в форме ν/T.

Первая работа, в которой Эренфест попытался сформулировать ответ на отмеченные выше противоречия, относится к 1913 году. Она вышла в Известиях Голландской академии наук, а несколько позднее, уже в 1914 году, был опубликован и ее русский перевод на страницах ЖРФХО. Эренфест подчеркивает парадоксальность сложившейся в теории излучения ситуации. Закон смещения Вина получен чисто классически, и вместе с тем именно он является незыблемой основой сугубо «антимеханической» (если воспользоваться словами самого Эренфеста) квантовой гипотезы Планка. В чем же специфика закона Вина, нельзя ли, поняв ее, попытаться найти более общую основу, на которой можно было бы понять и природу самого квантования, расширить «спектр» квантующихся величин и вместе с тем ту область, в которой оказывается действенной классическая механика?

По Планку энергия E гармонического осциллятора квантуется: $E = nh\nu$, где n — целое число, а h — постоянная Планка. При адиабатическом сжатии излучения, заключенного в полость, происходит такое перераспределение энергии в его спектре, что выполняется соотношение $E/\nu = \text{const}$ — таков результат классической теории; значит, сохраняется и значение h. Специфично ли постоянство отношения E/ν для чисто гармонических колебаний? Эренфест напоминает, что соотношение $\delta(E/\nu) = 0$ является частным случаем общей теоремы Больцмана. Согласно этой теореме, представляющей собой обобщение экстремального условия для действия, при адиабатическом переходе системы из одного состояния в другое, переходе, занимающем время $\tau = t_к - t_н$ ($t_н$ — начало процесса перехода, $t_к$ — его конец), количество тепла, сообщаемого системе, ΔQ*,

---

* Обычно под адиабатическим процессом понимается такой процесс, который протекает настолько быстро, что система не успевает обменяться теплом с окружающей средой, так что оказывается реализованным условие $\Delta Q = 0$. Выше условие адиабатичности понималось иначе, а именно как условие достаточной медленности процесса. Считалось, что он развивается так, чтобы тело при изменяющихся внешних условиях успевало бы в каждый рассматриваемый момент прийти в состояние равновесия со средой. Так, условие адиабатического (медленного) изменения длины l маятника Релея—Эйнштейна имеет вид $\Delta l/l \ll 1$, где Δl—изменение длины маятника, происходящее со скоростью v, за период его колебаний τ. Иначе говоря, получается следующее условие для скорости v : $v \ll g\tau$, где g — ускорение силы тяжести. Если условие адиабатичности (быстроты) с точки зрения сохранения теплоизолированности оказывается выполненным, то обычно автоматически выполняется и условие адиабатически медленного хода процесса

совершающей периодическое движение с периодом τ, следующим образом связано с ее кинетической энергией T:

$$\Delta Q = \frac{1}{\tau} 2\delta(\overline{T}\tau),$$

где $\overline{T}$ — среднее за период значение кинетической энергии. Если изменение внутренней энергии происходит целиком за счет действия внешних сил, то $\Delta Q = 0$. Отсюда следует, что $\overline{T}\tau = \text{const}$. Для систем, не обладающих потенциальной энергией, или для тех из них, в которых отношение средних за период значений T и потенциальной энергии постоянно (равно 1 для чисто гармонических колебаний), получаем $E/\nu = \text{const}$, где $\nu = \frac{1}{\tau}$.

Величина, сохраняющая неизменной свое значение при адиабатическом переходе, была названа Эренфестом «адиабатическим инвариантом». Таким образом, квантуется у Планка адиабатический инвариант, та самая величина, которая сохраняется постоянной и при изменении длины маятника Рэлея и является аргументом функции Вина. В более общем случае периодического движения адиабатическим инвариантом будет отношение $\overline{T}/\nu$.

Из статьи мы узнаем, что еще до ее опубликования Н. Герцфельд дал Эренфесту пример, когда соотношение $E/\nu = \text{const}$ не выполняется для периодического процесса движения, совершаемого системой, подвергающейся адиабатическому воздействию. Представим себе, что частица, на которую не действуют никакие силы, движется вперед и назад в закрытой трубке, упруго отражаясь от ее концов. Пусть теперь в центре трубки, в пределах узкой области пространства, возникает и начинает адиабатически возрастать отталкивающее силовое поле. Когда кинетическая энергия частицы будет равна потенциальной, соответствующей этому полю, частица отражается от «тонкой потенциальной стенки» так же упруго, как она отражалась от бесконечно высоких потенциальных стенок реальной трубки, сохранив запас своей энергии. Теперь, при неизменной энергии частицы, ее движение будет происходить с удвоенной частотой и адиабатический инвариант не сохраняется.

Однако наиболее существенным был другой пример, также разобранный Эренфестом: процесс адиабатического перехода от гармонических колебаний к вращательному движению в случае диполя, колеблющегося в плоскости, перпендикулярной к нити, на которой он подвешен. Пусть в плоскости существует некоторое электрическое поле; вокруг его направления и совершаются гармонические колебания такого осциллятора, энергию которых, по Планку, следует квантовать. Начнем адиабатически уменьшать внешний параметр (напряженность электрического поля); амплитуда колебаний диполя будет постепенно увеличиваться, пока он не «опрокинется» и не начнет равномерное вращение вокруг оси. Записывая выражение для периода такого колебания $\tau = 2\pi/\dot{q}$ ($\dot{q}$ — постоянная скорость вращения), учитывая, что кинетическая энергия $T = p\dot{q}/2$ (p — импульс, канонически сопряженный угловой координате q и равный в данном случае моменту количества движения) и приравнивая, наконец, $\overline{T}/\nu$ гармонически колеблющегося диполя

($= 0,\ h,\ 2h\ \ldots$), т. е. адиабатический инвариант рассматриваемой системы, его величине для ротатора, получаем, что импульс p оказывается проквантованным:

$$p = 0,\ \pm\frac{h}{2\pi},\quad \pm\frac{2h}{2\pi},\ldots$$

Обращая движение, т. е. адиабатически медленно включая нарастающее поле, приходим к квантовой формуле Планка.

Эренфест отмечает, что он обсуждал содержание статьи и с Эйнштейном: Эйнштейн обратил его внимание на одну трудность, возникшую при попытке приложения квантовой гипотезы к системе негармонически колеблющихся ротаторов. Замечание Эйнштейна сводилось к тому, что при адиабатическом переходе в общем случае нельзя утверждать, что, отправляясь от равновесного распределения (скажем, гармонически колеблющихся квантовых осцилляторов), придем в конце процесса к равновесному же распределению (ротаторов). Эту основную и другие трудности, замечает Эренфест, «я изложил ..., не умея их устранить». Отмеченная трудность относится, таким образом, не к квантовой теории, а к квантовой статистике середины второго десятилетия нашего века.

Работа Эренфеста была доложена им 29 ноября 1913 года в Голландии. В марте 1914 года Эйнштейн посетил эту страну и они виделись в Дордрехте с Эренфестом. А 24 июля 1914 года на заседании Немецкого физического общества в Берлине с докладом «К квантовой теории» выступил Эйнштейн. Именно в этом докладе впервые в физической литературе появляется термин «адиабатическая гипотеза Эренфеста». В этой работе в разделе, посвященном энтропии в квантовой теории и теореме Нернста, Эйнштейн рассматривает систему, состояние которой (в термодинамическом смысле) определяется не только температурой, но и некоторым параметром λ*. Энтропия такой системы дается формулой Больцмана $S = k\ln Z$ (Z — число состояний, соответствующих данному значению энергии). Сохранится ли эта формула при адиабатическом изменении упомянутого параметра? «На этот вопрос,— пишет Эйнштейн,— нельзя ответить без новых гипотез. Наиболее вероятная гипотеза — это адиабатическая гипотеза Эренфеста, которую можно сформулировать следующим образом. При обратимом адиабатическом изменении параметра λ всякое возможное состояние переходит снова в состояние того же типа» (т. е. в возможное с точки зрения квантовой теории)**.

Более четкое определение адиабатической гипотезы имеется в следующей публикации Эренфеста на ту же тему (1913 год). Он вво-

---

* Для простоты ограничимся в дальнейшем одним параметром; число их, разумеется, может быть и бо́льшим.

** Далее Эйнштейн в качестве следствия гипотезы Эренфеста (или, лучше сказать, иной ее формулировки) пишет о том, что при адиабатических процессах не изменяется число Z, а значит, сохраняет свою силу соотношение Больцмана Отсюда он легко доказывает, что теорема Нернста (третье начало термодинамики) справедлива для химически чистых веществ, а не для кристаллических смесей.

дит понятие об адиабатически сопряженных периодических движениях некоторой системы. Пусть система совершает некоторое движение в неизменных внешних условиях (постоянство λ). Начнем теперь адиабатически изменять λ. По прошествии какого-то времени прекратим дальнейшее изменение. Система к этому моменту совершает другое движение, которое и называется адиабатически сопряженным исходному.

Квантовая теория из всех возможных движений системы выделяет допустимые («admissible»), которые она может совершать при данном значении λ. Адиабатическая гипотеза Эренфеста в его собственной формулировке утверждает, что некоторому новому значению параметра λ соответствует также допустимое с точки зрения квантовой теории движение — в том случае, если это последнее адиабатически сопряжено с исходным.

Величины, которые для двух адиабатически сопряженных движений сохраняют свою величину, называются адиабатическими инвариантами.* Если допустимому движению с данным значением параметра соответствует дискретный спектр значений некоторого адиабатического инварианта, то этот же дискретный спектр будет характеризовать и адиабатически сопряженное движение. Для объяснения дискретного спектра ротатора не нужно делать новых гипотез — наличие этого спектра является следствием адиабатической гипотезы Эренфеста. Еще до опубликования работ Эренфеста Дебай постулировал дискретность спектра ангармонического осциллятора; это была новая гипотеза, высказанная по аналогии с оправдавшей себя гипотезой Планка. И в этом случае имеет место аналогичная картина. Эренфест записывает уравнение движения ангармонического осциллятора:

$$\ddot{q} = -(\nu^2 q + \lambda_1 q^2 + \lambda_2 q^3 + \ldots)$$

и полагает λ_1, λ_2 и т. д. параметрами движения этого осциллятора. Начинаем адиабатически их уменьшать. Приходим к осциллятору Планка с его дискретным спектром. Отсюда ясно, что и спектр осциллятора Дебая квантован. То же самое справедливо и для гипотезы Зоммерфельда (1916 год) о квантовании эллиптических орбит атомных электронов: два условия квантования являются в этом случае следствием адиабатической гипотезы Эренфеста и соответствуют существованию для этого типа движения двух адиабатических инвариантов.

Наконец, отметим, что в своей статье 1916 года Эренфест вновь возвращается к проблеме статистического веса, обсуждавшейся им как в 1911 году, так и в работе 1913 года, но делает это теперь с позиций четко сформулированной им адиабатической гипотезы. Для случая системы с одной степенью свободы, совершающей периодическое движение, результат формулируется так: «Для ансамбля таких молекул (резонаторов) соотношение Больцмана между энтропией и вероятностью будет справедливо тогда и только тогда, когда установившееся движение характеризуется следующим условием:

$$2\overline{T} / \nu = \iint dp\,dq \text{ — постоянные числа } \Omega_1,\ \Omega_2, \ldots,$$

* Их называют «адиабатическими» инвариантами Эренфеста.

причем это условие инвариантно по отношению к адиабатическому изменению» (т. е. величина $2\overline{T}/\nu$ является адиабатическим инвариантом). Эренфест подчеркивает, однако, в заключение статьи, что в общем случае вопрос, поднятый Эйнштейном при обсуждении первой статьи Эренфеста, остается открытым. Являются ли два адиабатически сопряженных состояния, которые характеризуются адиабатически сопряженными движениями составляющих систему элементов, состояниями равновесными, т. е. следует ли из максимальности энтропии одного такое же условие для другого?

Свою статью Эренфест заключает словами, непосредственно перекликающимися с первыми строками ранней публикации 1913 года, а именно: закон смещения Вина показывает, независимо от трудностей, которые стоят на пути дальнейшего обобщения адиабатической гипотезы, что «адиабатически обратимые процессы занимают специальное место в квантовой теории».

Заметим, что из адиабатической инвариантности отношения E/ν для планковского осциллятора, т. е. из сохраняющегося в процессе адиабатического перехода соотношения $E = nh\nu$ сразу же следует, что при адиабатическом изменении внешних параметров (например, при адиабатическом включении внешнего магнитного поля) квантовое число n сохраняется неизменным. Отсюда становится понятным тот факт, что при помещении атомов в медленно возрастающее магнитное поле не имеют место переходы, сопровождающиеся излучением света. Это обстоятельство, т. е. сохранение квантового числа при изменении уровня энергии (т. е. величины E_n) получило название адиабатической теоремы Эренфеста, и в такой формулировке она фигурирует наиболее часто.

Практически во всех статьях Бора, публиковавшихся в начале 20-х годов, и в лекциях, читавшихся им в то время, Бор специально останавливается на роли идей Эренфеста. «Значение адиабатической гипотезы,— писал он,— в квантовой теории исключительно велико, поскольку она ведет к разъяснению и развитию формальных принципов определения стационарных состояний». В другой статье, говоря о принципе соответствия, Бор замечает: «Я с удовольствием в этом месте упоминаю о работах Эренфеста, касающихся пределов применимости законов классической механики к атомным процессам».

Столь же высокую оценку работ Эренфеста мы находим и у Борна: «Эренфест имеет огромную заслугу перед развитием квантовой теории, установив постулат, позволяющий дать чисто теоретическое определение квантовым величинам».

Дальнейшее развитие представлений Эренфеста об адиабатических инвариантах и обобщение их на случай так называемых условно-периодических систем, т. е. систем с несколькими степенями свободы, уравнения движения которых могут быть разрешены разделением переменных, принадлежат ученикам Эренфеста Бюргерсу и Круткову.

Отголоски адиабатической гипотезы и теоремы Эренфеста имеются и в современной квантовой механике — в приближенных методах решения возникающих в ней нестационарных задач с зависящим от времени гамильтонианом (квантовомеханическом операторе энергии). Исходной для развития этих методов работой была статья М. Борна и советского физика В. А. Фока.